Géométrie analytique dans le plan

Géométrie analytique dans le plan 1
1. Les représentations paramétriques d'une droite 2
2. Distance d’un point à une droite 4
3. Angle de deux droites 6
4. Solution détaillées 9

1. Les représentations paramétriques d'une droite

Soit un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

Soit une droite (d) passant par le point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix} x_{\vec{n}} \\ y_{\vec{n}} \end{pmatrix}$.

Soit le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$M \in (d)$ ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{n}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_{\vec{n}} \\ y_{\vec{n}} \end{pmatrix}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x - x_A = kx_{\vec{n}} \\ y - y_A = ky_{\vec{n}} \end{cases}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{n}} \\ y = y_A + ky_{\vec{n}} \end{cases}$

$\begin{cases} x = x_A + k\,x_{\vec{n}} \\ y = y_A + k\,y_{\vec{n}} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (d).

C'est comme une usine à points: chaque k va produire les coordonnées d'un point de la droite (d).

On note (d): $\begin{cases} x = x_A + k\,x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + k\,y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

Une droite a une infinité d'équations paramétriques:

i. à la place du point A, on peut prendre n'importe quel autre point de la droite (d);
ii. à la place du vecteur directeur $\vec{n}$, on peut prendre n'importe quel autre vecteur directeur de la droite (d).

Exercice 1

Soit deux points distincts $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une équation paramétrique de la demi-droite $[AB)$.
b) Déterminer une équation paramétrique de la demi-droite $]AB)$.
c) Déterminer une équation paramétrique du segment $[AB]$.

Solutions de l'exercice 1

(AB): $\begin{cases} x = x_A + k\,x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + k\,y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

a) $[AB)$: $\begin{cases} x = x_A + k\,x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + k\,y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}, k \in [0;+\infty]$

b) $]AB)$: $\begin{cases} x = x_A + k\,x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + k\,y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}, k \in]0;-\infty[$

c) $[AB]$: $\begin{cases} x = x_A + k\,x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + k\,y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}, k \in [0;1]$

Exercice 2

Déterminer une équation paramétrique et ensuite l'équation cartésienne réduite des droites suivantes. Représenter ces droites dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

a) La droite qui passe par les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

b) La droite (h) qui passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à l'axe des abscisses.

c) La droite (v) qui passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à l'axe des ordonnées.

Solutions de l'exercice 2

a) $(AB): \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

$(AB): y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

b) $(h): \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

$(h): y = 2$.

c) $(v): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

$(v): x = 1$.

Exercice 3

Déterminer une équation paramétrique et ensuite l'équation cartésienne réduite des droites suivantes. Représenter ces droites dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

a) La droite qui passe par les points $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.

b) La droite (t) qui passe par $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à l'axe des abscisses.

c) La droite (p) qui passe par $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à l'axe des ordonnées.

d) L'axe des abscisses.

e) L'axe des ordonnées.

Solutions de l'exercice 3

a) $(CD): \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = -2 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$; $(CD): y = \frac{-2}{3}x - \frac{8}{3}$.

b) $(t): \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$; $(t): y = -2$.

c) $(p): \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$; $(p): x = -1$.

d) $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$; $y = 0$.

e) $\begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$; $x = 0$.

2. Distance d'un point à une droite

Définition

La distance d'un point M à une droite (d) est égale à la distance MM' où M' est le projeté orthogonal de M sur (d). On note cette distance $d(M,(d))$.

Propriété

Soit un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.
Soit une droite (d) d'équation $a\,x+b\,y+c=0$.
Soit un point $M\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix}$.
Alors $d\big(M,(d)\big)=\frac{|a\,x_M+b\,y_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Preuve

Soit M' le projeté orthogonal de M sur (d).

Si $M=M'$ alors $d\big(A,(d)\big)=MM'=0$

$\frac{|a\,x_M+b\,y_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ car $M\in d$

$d\big(A,(d)\big)=\frac{|a\,x_M+b\,y_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Supposons que $M\neq M'$.
Soit le vecteur $\vec{n}=a\,\vec{\imath}+b\,\vec{\jmath}$.
$\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).
(i)

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{MM'}\right| = \left|\|\vec{n}\|\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|\cos\big(\vec{n},\overrightarrow{MM'}\big)\right| = \|\vec{n}\|\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|\left|\cos\big(\vec{n},\overrightarrow{MM'}\big)\right|$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\times\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|\times 1=\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|\sqrt{a^2+b^2}$$

(ii)

$(MM'):\begin{cases}x=x_M+k\,a\\y=y_M+k\,b\end{cases}\ ,k\in\mathbb{R}$

$M'\begin{pmatrix}x_M+k\,a\\y_M+k\,b\end{pmatrix}$

$M'\in(d)$: $a\,(x_M+k\,a)+b\,(y_M+k\,b)+c=0$

$a\,x_M+a^2\,k+b\,y_M+b^2\,k+c=0$

$k=\frac{-c-a\,x_M-b\,y_M}{a^2+b^2}$

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}k\,a\\k\,b\end{pmatrix}$

$$\vec{n}.\overrightarrow{MM'}=(a)(k\,a)+(b)(k\,b)=k(a^2+b^2)=\frac{-c-a\,x_M-b\,y_M}{a^2+b^2}(a^2+b^2)=-a\,x_M-b\,y_M-c$$

(iii)

$$d\big(M,(d)\big)=\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|=\frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{MM'}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-a\,x_M-b\,y_M-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a\,x_M+b\,y_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

c.q.f.d.

Exercice 4

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Déterminer par calcul la position relative du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\triangle)$.
Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite $(\triangle)$.

1) $(\mathcal{C}): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ et $(\triangle): y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$
2) $(\mathcal{C}): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ et $(\triangle): y = 3x + 4$
3) $(\mathcal{C}): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ et $(\triangle): y = -x - 8$

Solutions :

a) $d\big(I,(\triangle)\big) = 5 = r$; la droite $(\triangle)$ est tangente au cercle $(\mathcal{C})$
b) $d\big(I,(\triangle)\big) = \frac{\sqrt{10}}{2} < r = 5$; la droite $(\triangle)$ est sécante au cercle $(\mathcal{C})$
c) $d\big(I,(\triangle)\big) = \frac{9\sqrt{2}}{2} > r = 5$; la droite $(\triangle)$ est extérieure au cercle $(\mathcal{C})$

Exercice 5

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Déterminer par calcul la position relative du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\triangle)$.
Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite $(\triangle)$.

a) $(\mathcal{C}): (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$ et $(\triangle): y = 2x + 1$
b) $(\mathcal{C}): (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$ et $(\triangle): y = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$
c) $(\mathcal{C}): (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$ et $(\triangle): y = -2x + 5$

Solutions :

a) $d\big(I,(\triangle)\big) = \frac{8\sqrt{5}}{5} > r = \sqrt{5}$; la droite $(\triangle)$ est extérieure au cercle $(\mathcal{C})$
b) $d\big(I,(\triangle)\big) = \sqrt{5} = r$; la droite $(\triangle)$ est tangente au cercle $(\mathcal{C})$
c) $d\big(I,(\triangle)\big) = \frac{4\sqrt{5}}{5} < r = \sqrt{5}$; la droite $(\triangle)$ est sécante au cercle $(\mathcal{C})$

3. Angle de deux droites

Soient deux droites (d) et (d'). L'angle α entre les deux droites (d) et (d') est donné par la formule suivante :

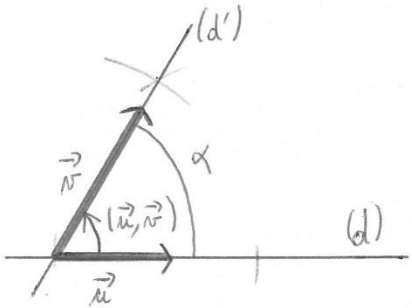
$$\alpha = arccos\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

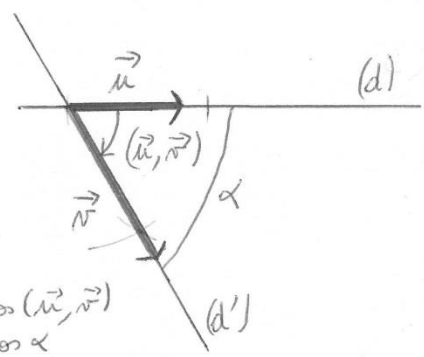
où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d)
$\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d').

CAS 1

a) $0 \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq \frac{\pi}{2}$

b) $-\frac{\pi}{2} \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 0$



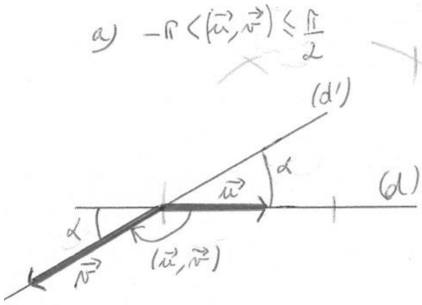


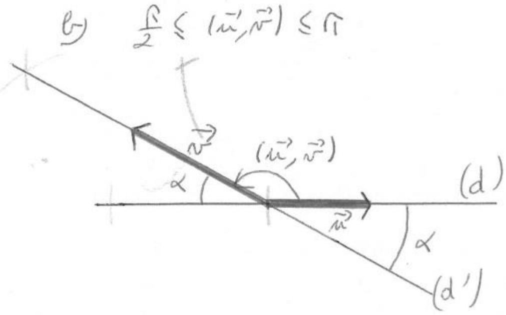
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$
$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\alpha$$
$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}.\vec{v}| \text{ car } \vec{u}.\vec{v} \geq 0$$
$$|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

CAS 2

a) $-\pi < (\vec{u}, \vec{v}) \leq \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{2} \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$





$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}.(-\vec{v})|}{\|\vec{u}\| \|-\vec{v}\|}$$

$$\cos\alpha = \frac{|-(\vec{u}.\vec{v})|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Exercice 5

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Déterminer l'angle entre les deux droites (d) et $(\triangle)$. Donner la valeur exacte et puis une valeur approchée au degré près.

b) En déduire la position relative de la droite (d) par rapport àla droite $(\triangle)$.

c) Tracer la droite (d) et la droite $(\triangle)$.

1) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle): \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

2) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle): \begin{cases} x = \frac{-9}{2} - 2k \\ y = \frac{-5}{2} + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

3) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle): \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

4) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle): \begin{cases} x = \frac{-9}{2} - 9k \\ y = \frac{-9}{2} - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

5) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle): \begin{cases} x = -2 + 9k \\ y = 3 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Solutions :

1) a) $\alpha = 90^\circ$ b) $(d) \perp (\triangle)$
2) a) $\alpha = 45^\circ$ b) (d) et $(\triangle)$ sont sécantes
3) a) $\alpha = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\alpha \approx 27^\circ$ au degré près b) (d) et $(\triangle)$ sont sécantes
4) a) $\alpha = 0^\circ$ b) $(d)//(\triangle)$
5) a) $\alpha = 0^\circ$ b) $(d)//(\triangle)$

Exercice 6

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Déterminer l'angle entre les deux droites (d) et $(\triangle)$. Donner la valeur exacte et puis une valeur approchée au degré près.
b) En déduire la position relative de la droite (d) par rapport àla droite $(\triangle)$.
c) Tracer la droite (d) et la droite $(\triangle)$.

1) (d): $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle)$: $\begin{cases} x = \frac{3}{2}k \\ y = \frac{-1}{2}k \end{cases}$ $, k \in \mathbb{R}$
2) (d): $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle)$: $\begin{cases} x = -2-6k \\ y = 3+2k \end{cases}$ $, k \in \mathbb{R}$
3) (d): $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle)$: $\begin{cases} x = k \\ y = 2 \end{cases}$ $, k \in \mathbb{R}$
4) (d): $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ et $(\triangle)$: $\begin{cases} x = -2+2k \\ y = 3+6k \end{cases}$ $, k \in \mathbb{R}$

Solutions :

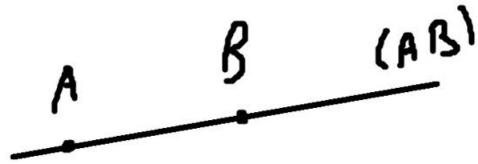
1) a) $\alpha = 0^\circ$ b) $(d)//(\triangle)$
2) a) $\alpha = 0^\circ$ b) $(d)//(\triangle)$
3) a) $\alpha = \arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\alpha \approx 18^\circ$ au degré près b) (d) et $(\triangle)$ sont sécantes
4) a) $\alpha = 90^\circ$ b) $(d) \perp (\triangle)$

4. Solution détaillées

Solutions de l'exercice 1

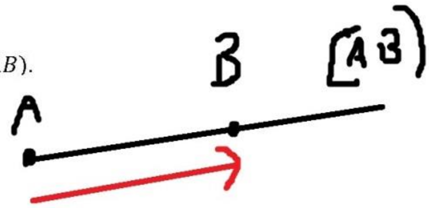
Soit deux points distincts $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{AB}} \\ y_{\vec{AB}} \end{pmatrix}$$



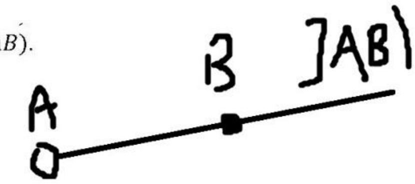
$$(AB) : \begin{cases} x = x_A + k\, x_{\vec{AB}} \\ y = y_A + k\, y_{\vec{AB}} \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer une équation paramétrique de la demi-droite $[AB)$.



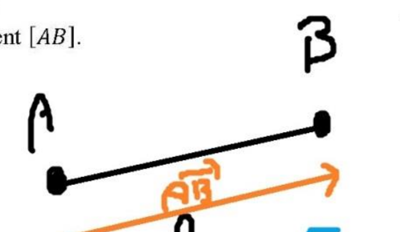
$$[AB) : \begin{cases} x = x_A + k\, x_{\vec{AB}} \\ y = y_A + k\, y_{\vec{AB}} \end{cases} ; k \in [0 ; +\infty[$$

b) Déterminer une équation paramétrique de la demi-droite $]AB)$.



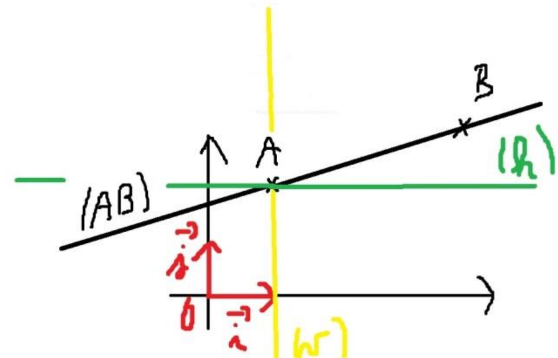
$$]AB) : \begin{cases} x = x_A + k\, x_{\vec{AB}} \\ y = y_A + k\, y_{\vec{AB}} \end{cases} ; k \in]0 ; +\infty[$$

c) Déterminer une équation paramétrique du segment $[AB]$.



$$[AB] : \begin{cases} x = x_A + k\, x_{\vec{AB}} \\ y = y_A + k\, y_{\vec{AB}} \end{cases} ; k \in [0 ; 1]$$

Solutions détaillées de l'exercice 2



a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(1)\\3-(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$(AB)\colon\begin{cases}x=1+k3\\y=2+k1\end{cases}\quad ,k\in\mathbb{R}$

$(AB)\colon\begin{cases}x=1+3k\\y=2+k\end{cases}\quad ,k\in\mathbb{R}$

Déterminons l'équation cartésienne réduite :

$x=1+3k\Leftrightarrow x-1=3k\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{3}=k$

$y=2+k\Leftrightarrow y-2=k$

$y-2=\dfrac{x-1}{3}\Leftrightarrow y=\dfrac{x-1}{3}+2\Leftrightarrow y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{6}{3}\Leftrightarrow y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{3}$

$(AB)\colon y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

b) $\vec{\imath}$ est un vecteur directeur de l'axe des abscisses
et donc $\vec{\imath}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (h)
car (h) est parallèle à l'axe des abscisses.

$\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$(h)\colon\begin{cases}x=1+1\,k\\y=2+0k\end{cases}\quad ,k\in\mathbb{R}$

$(h)\colon\begin{cases}x=1+k\\y=2\end{cases}\quad ,k\in\mathbb{R}$

Déterminons l'équation cartésienne réduite : $(h)\colon y=2$.

c) $\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées
et donc $\vec{\jmath}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (v)
car (v) est parallèle à l'axe des ordonnées.

$\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$(v)\colon\begin{cases}x=1+0k\\y=2+1k\end{cases}\quad ,k\in\mathbb{R}$

$(v)\colon\begin{cases}x=1\\y=2+k\end{cases}\quad ,k\in\mathbb{R}$

Déterminons l'équation cartésienne réduite : $(v)\colon x=1$.

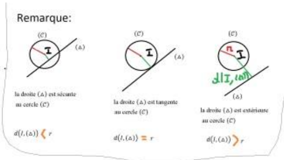
Solutions détaillée de l'exercice 4

Exercice 1

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer par calcul la position relative du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite (Δ).
Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ).

a) $(\mathcal{C}): (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $(\Delta): y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$
b) $(\mathcal{C}): (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $(\Delta): y=3x+4$
c) $(\mathcal{C}): (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $(\Delta): y=-x-8$

Solutions :
a) $d(I,(\Delta))=5=r$; la droite (Δ) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$
b) $d(I,(\Delta))=\frac{\sqrt{10}}{2}<r=5$; la droite (Δ) est sécante au cercle $(\mathcal{C})$
c) $d(I,(\Delta))=\frac{9\sqrt{2}}{2}>r=5$; la droite (Δ) est extérieure au cercle $(\mathcal{C})$



$(\Delta_a): y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$

x	y
0	$-\frac{8}{3} \approx -2,6$
3	$\frac{4}{3}3-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\approx 1,3$

$(\Delta_b): y=3x+4$

x	y
0	4
1	7

$(\Delta_c): y=-x-8$

x	y
0	-8
-8	$-(-8)-8=0$

a) Soit I le centre du cercle $(\mathcal{C})$.

$I\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$d(I,(\Delta))=\frac{|a x_I+b y_I+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$(\Delta): y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$

$(\Delta): \frac{4}{3}x-y-\frac{8}{3}=0$

$(\Delta): 4x-3y-8=0$

$d(I,(\Delta))=\frac{|4(-2)-3(3)-8|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}$

$=\frac{|-8-9-8|}{\sqrt{16+9}}$

$=\frac{|-25|}{5}$

$=\frac{25}{5}$

$=5$

$r=5$

$d(I,(\Delta))=r$

La droite (Δ) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

b) $(\mathcal{C}): (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $(\Delta): y=3x+4$

Soit I le centre du cercle $(\mathcal{C})$.

$I\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$(\Delta): y=3x+4$ $\quad /-y$

$(\Delta): 3x-y+4=0$

$d(I,(\Delta))=\frac{|3(-2)-(3)+4|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2}}$

$=\frac{|-6-3+4|}{\sqrt{9+1}}$

$=\frac{|-5|}{\sqrt{10}}$

$=\frac{5}{\sqrt{10}}$

$\approx 1,58$ à 10^{-2} près

$r=5$

$d(I,(\Delta))<r$

La droite (Δ) est sécante au cercle $(\mathcal{C})$.

c) $(\mathcal{C}): (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $(\Delta): y=-x-8$

Soit I le centre du cercle $(\mathcal{C})$.

$I\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$(\Delta): y=-x-8$ $\quad /-y$

$(\Delta): -x-y-8=0 \quad /\cdot(-1)$

$(\Delta): x+y+8=0$

$d(I,(\Delta))=\frac{|(-2)+(3)+8|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}$

$=\frac{|9|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{9}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

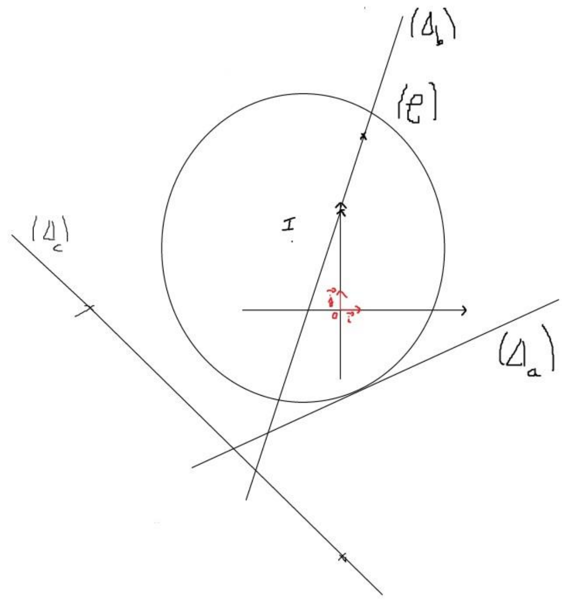
$=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

$\approx 6,36$ à 10 près

$r=5$

$d(I,(\Delta))>r$

La droite (Δ) est extérieure au cercle $(\mathcal{C})$



Solutions détaillée de l'exercice 5

Exercice

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer l'angle entre les deux droites (d) et (Δ). Donner la valeur exacte et puis une valeur approchée au degré près.

b) En déduire la position relative de la droite (d) par rapport àla droite (Δ).

c) Tracer la droite (d) et la droite (Δ).

1) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

a) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

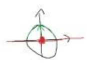
Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

$\alpha = \arccos \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

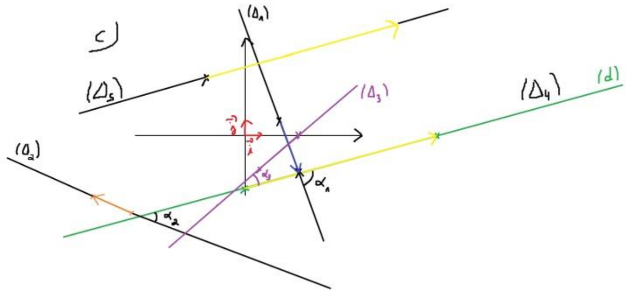
$= \arccos \frac{|(9)(1)+(3)(-3)|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

$= \arccos 0$



$\boxed{\alpha = 90^\circ}$

b) $(d) \perp (\Delta)$



2) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\Delta): \begin{cases} x = \frac{-9}{2} - 2k \\ y = \frac{-3}{2} + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

a) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

$\alpha = \arccos \frac{|(9)(-2)+(3)(1)|}{\sqrt{(9)^2+(3)^2}\sqrt{(-2)^2+(1)^2}}$

$= \arccos \frac{|-18+3|}{\sqrt{81+9}\sqrt{4+1}}$

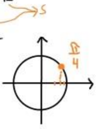
$= \arccos \frac{|-15|}{\sqrt{90}\sqrt{5}}$

$= \arccos \frac{15}{\sqrt{2}\sqrt{5}\underbrace{\sqrt{9}}_{3}\sqrt{5}}$ $\rightarrow 5$

$= \arccos \frac{15}{\sqrt{2}\,15} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 45^\circ$



b) (d) et (Δ) sont sécantes

3) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\Delta): \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

a) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

$\alpha = \arccos \frac{|(9)(1)+(3)(1)|}{\sqrt{(9)^2+(3)^2}\sqrt{(1)^2+(1)^2}}$

$= \arccos \frac{|12|}{\sqrt{81+9}\sqrt{2}}$

$= \arccos \frac{12}{\sqrt{90}\sqrt{2}}$

$= \arccos \frac{12}{\sqrt{2}\sqrt{5}\underbrace{\sqrt{9}}_{3}\sqrt{2}}$ $\rightarrow 2$

$= \arccos \frac{12}{\sqrt{5}\,6} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$\boxed{\alpha = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

$\boxed{\alpha \approx 27^\circ}$

b) (d) et (Δ) sont sécantes

4) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\Delta): \begin{cases} x = \frac{-9}{2} - 9k \\ y = \frac{-3}{2} - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

a) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

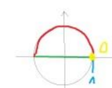
$\alpha = \arccos \frac{|(9)(-9)+(3)(-3)|}{\sqrt{(9)^2+(3)^2}\sqrt{(-9)^2+(-3)^2}}$

$= \arccos \frac{|-81-9|}{\sqrt{81+9}\sqrt{81+9}}$

$= \arccos \frac{|-90|}{\sqrt{90}\sqrt{90}}$

$= \arccos \frac{90}{90}$

$= \arccos 1$



$\boxed{\alpha = 0^\circ}$

b) $(d)//(\Delta)$

5) $(d): \begin{cases} x = \frac{9}{2}t \\ y = -3 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\Delta): \begin{cases} x = -2 + 9k \\ y = 3 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

a) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

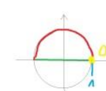
$\alpha = \arccos \frac{|(9)(9)+(3)(3)|}{\sqrt{(9)^2+(3)^2}\sqrt{(9)^2+(3)^2}}$

$= \arccos \frac{|81+9|}{\sqrt{81+9}\sqrt{81+9}}$

$= \arccos \frac{|90|}{\sqrt{90}\sqrt{90}}$

$= \arccos \frac{90}{90}$

$= \arccos 1$



$\boxed{\alpha = 0^\circ}$

b) $(d)//(\Delta)$